

# TD 16 : Convexité

## Exercices théoriques sur la convexité

**1** ★★ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes.

- 1) Montrer que  $f + g$  est convexe.
- 2) Montrer que si  $g$  est croissante, alors  $g \circ f$  est convexe.
- 3) Dans le cas général, peut-on affirmer que  $g \circ f$  est convexe ?

**2** ★★★ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

- 1) On suppose  $f$  dérivable. Montrer que si  $f$  admet un minimum local en  $a$ , alors ce minimum est global.
- 2) Même question sans l'hypothèse " $f$  dérivable".
- 3) Que peut-on dire si  $f$  admet un maximum local en  $a$  ?

**3** ★★★ Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe majorée. Montrer que  $f$  est constante.

## Inégalités de convexité

**4** ★★ En utilisant un argument de convexité, montrer les assertions suivantes :

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leq x - 1$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

**5** ★★ Montrer que  $x \mapsto \ln(\ln x)$  est concave sur  $]1, +\infty[$ . En déduire :

$$\forall a, b > 1 \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

**6** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

**7** ★★★ Soit  $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) La fonction  $f$  est-elle convexe ou concave ?
- 2) En déduire que pour tous  $x_1, \dots, x_n > 0$ , on a :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + x_k)}$$

- 3) En déduire que pour tous  $x_1, \dots, x_n > 0$  et  $y_1, \dots, y_n > 0$ , on a :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)}$$

**8** ★★★ Soit  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- 1) Montrer que pour tous  $a, b > 0$ , on a :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

- 2) En déduire que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n > 0$ , on a

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}$$