

TD 16 : Convexité

Exercices théoriques sur la convexité

1 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

- 1) Montrer que $f + g$ est convexe.
- 2) Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
- 3) Dans le cas général, peut-on affirmer que $g \circ f$ est convexe ?

2 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- 1) On suppose f dérivable. Montrer que si f admet un minimum local en a , alors ce minimum est global.
- 2) Même question sans l'hypothèse " f dérivable".
- 3) Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

3 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Inégalités de convexité

4 ★★ En utilisant un argument de convexité, montrer les assertions suivantes :

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leq x - 1$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

5 ★★ Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$. En déduire :

$$\forall a, b > 1 \quad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

7 ★★★ Soit $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) La fonction f est-elle convexe ou concave ?
- 2) En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$, on a :

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + x_k)}$$

- 3) En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$ et $y_1, \dots, y_n > 0$, on a :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)}$$

8 ★★★ Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 1) Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

- 2) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{1/q}$$